Übungsstunde 12:

Themen:

- Prüfung Herbstsemester 2017

Prüfung Herbstsemester 2017:

1. [6 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \\ 0 & -2 & \beta \end{bmatrix}.$$

a) Finden Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass die Spaltenvektoren von A orthogonal sind.

b) Mit den Werten α und β wie in **a)**:

1. Berechnen Sie eine QR-Zerlegung von A.
2. Berechnen Sie $|\det(A)|$.

a) $\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \right\rangle \stackrel{!}{=} 0 \iff 1 - \alpha = 0 \qquad \underline{\underline{\alpha = 1}}$

$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \right\rangle \stackrel{!}{=} 0 \iff 1 + \alpha - 2\beta = 0 \qquad \underline{\underline{\beta = 1}}$

b)
1. $$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}}_{R}$$

2. $$|\det(A)| = |\det(Q \cdot R)| = |\det(Q)\det(R)|$$
$$= \underbrace{|\det(Q)|}_{\pm 1} \cdot |\det(R)| = |\det(R)| = \underline{\underline{6}}$$

2. [6 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von C.

b) Bestimmen Sie eine orthonormale Eigenbasis zu C.

c) Berechnen Sie die Matrix

$$e^C = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} C^n.$$

a)

EW: $\det(C - \lambda I) \overset{!}{=} 0$

Könnte man machen

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda^{+} & 0^{-} & -3 \\ 0^{-} & 2-\lambda^{+} & 0 \\ -3^{+} & 0^{-} & 2-\lambda \end{bmatrix} = \left((2-\lambda) \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} - 3 \det \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2-\lambda & 0 \end{bmatrix} \right)$$

schlauer

$$= (2-\lambda) \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -3 \\ -3 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 9\right] \overset{!}{=} 0$$

$\underline{\underline{\lambda_1 = 2}}, \quad \underline{\underline{\lambda_2 = 5}}, \quad \underline{\underline{\lambda_3 = -1}}$

EV: $(C - \lambda I)x \overset{!}{=} 0$

$\lambda_1 = 2$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_2 = t \in \mathbb{R} \end{array} \Rightarrow \underline{\underline{E_2 = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}}}$

$\lambda_2 = 5$: $\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_1 = -x_3 \end{array} \Rightarrow \underline{\underline{E_5 = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}}$

$\lambda_3 = -1$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_1 = x_3 \end{array} \Rightarrow \underline{\underline{E_{-1} = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}}$

b)

$$b^{(1)} = E_2 = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}, \quad b^{(2)} = \frac{E_5}{\|E_5\|} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}}, \quad b^{(3)} = \frac{E_{-1}}{\|E_{-1}\|} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

Alle stehen orthogonal aufeinander, da C symm.

c)

$$e^C = T e^D T^T \quad \text{mit} \quad T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow e^C = \underline{\underline{\frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^5 + e^{-1} & 0 & e^{-1} - e^5 \\ 0 & 2e^2 & 0 \\ e^{-1} - e^5 & 0 & e^5 + e^{-1} \end{bmatrix}}}$$

3. [6 Punkte] Für $k \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathcal{P}^k$ den Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad $< k$. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{F} : \mathcal{P}^3 \to \mathcal{P}^3$ definiert für alle $f \in \mathcal{P}^3$ und alle $x \in \mathbb{R}$ durch

$$\begin{cases} f \mapsto \mathcal{F}(f), \\ \mathcal{F}(f)(x) = xf'(x) + \frac{1}{x}\int_0^x f(s)ds. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ eine lineare Abbildung ist.

b) Gegeben seien im Urbildraum und im Bildraum die Basis $1, x, x^2$. Durch welche Matrix A wird $\mathcal{F}$ beschrieben?

c) Gegeben seien im Urbildraum die Basis $1-x$, $2x$, $4x^2$ und im Bildraum die Basis 2, $\frac{x}{4}$, $\frac{x^2}{3}$. Welches ist die neue Matrix B, die $\mathcal{F}$ nach dem Basiswechsel beschreibt?

a) 2 Kriterien: $\forall a,b \in \mathcal{P}^3$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

i) $\mathcal{F}(a+b) = \mathcal{F}(a) + \mathcal{F}(b)$

ii) $\mathcal{F}(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot \mathcal{F}(a)$

$$\mathcal{F}(a(x)) = x \cdot a'(x) + \frac{1}{x}\int_0^x a(s)\,ds$$

Die Abbildung ist zuerst einmal wohldefiniert, da

$\mathcal{F}(1) = \underline{1} \in \mathcal{P}^3$, $\mathcal{F}(x) = \underline{\frac{3}{2}}x \in \mathcal{P}^3$, $\mathcal{F}(x^2) = \underline{\frac{7}{3}}x^2 \in \mathcal{P}^3$

i) & ii):

$$\mathcal{F}(a+\alpha b) \overset{!}{=} \mathcal{F}(a) + \alpha\mathcal{F}(b)$$

$$= x(a+\alpha b)' + \frac{1}{x}\int_0^x (a(s) + \alpha b(s))\,ds$$

$$= x \cdot a'(x) + \alpha x b'(x) + \frac{1}{x}\int_0^x a(s)ds + \frac{\alpha}{x}\int_0^x b(s)ds$$

$$= x \cdot a'(x) + \frac{1}{x}\int_0^x a(s)ds + \alpha\left(xb'(x) + \frac{1}{x}\int_0^x b(s)ds\right)$$

$$= \mathcal{F}(a(x)) + \alpha\,\mathcal{F}(b(x)) \quad \square$$

b)

$$\left.\begin{array}{lll} 1 \xrightarrow{F} 1 & = & 1\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \\ x \xrightarrow{F} \frac{3}{2}x & = & 0\cdot 1 + \frac{3}{2}\cdot x + 0\cdot x^2 \\ x^2 \xrightarrow{F} \frac{7}{3}x^2 & = & 0\cdot 1 + 0\cdot x + \frac{7}{3}x^2 \end{array}\right\} \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

c) $\{1-x,\ 2x,\ 4x^2\} \longrightarrow \{2,\ \frac{x}{4},\ \frac{x^2}{3}\}$

$$\begin{tikzcd} P^3 \arrow[r, "F"] \arrow[d, "k_x"] & P^3 \arrow[d, "k_x"] \\ B \arrow[r, "\underline{\underline{A}}"] \arrow[d, "T"] & B \arrow[d, "T'"] \\ C \arrow[r, "\underline{\underline{B}}"'] & D \end{tikzcd} \qquad B = T' A T^{-1}$$

$$\begin{array}{lll} 1-x \xrightarrow{F} 1-\frac{3}{2}x & = & \frac{1}{2}\cdot 2 - 6\cdot\frac{x}{4} + 0\cdot\frac{x^2}{3} \\ 2x \xrightarrow{F} 3x & = & 0\cdot 2 + 12\,\frac{x}{4} + 0\,\frac{x^2}{3} \\ 4x^2 \xrightarrow{F} \frac{28}{3}x^2 & = & 0\cdot 2 + 0\cdot\frac{x}{4} + 28\,\frac{x^2}{3} \end{array}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -6 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 28 \end{bmatrix}$$

4. [6 Punkte] Gegeben sei das Ausgleichsproblem: finde $x \in \mathbb{R}^2$, so dass

$$x = \arg\min_{v \in \mathbb{R}^2} \|Av - b\|_2,$$

wobei

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) Lösen Sie (1) mithilfe einer Singulärwertzerlegung.

b) Schreiben Sie die Normalgleichungen für (1) auf und lösen Sie sie.

Hinweis: Mit der Notation "argmin" in (1) ist das Element $x \in \mathbb{R}^2$ gemeint, welches den Ausdruck $\|Ax - b\|_2$ minimiert.

$$\Rightarrow \underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{\hat{S}}} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{V}} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{U}} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\underline{d}_0 = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{V}}^T \underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{V}}^T \underline{x} = \underline{\underline{U}}^T \underline{b} = \underline{d}$$

$$\underline{\underline{\hat{S}}}\,\underline{\underline{V}}^T \underline{x} = \underline{d}_0$$

$$\underline{x} = \underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{\hat{S}}}^{-1} \underline{d}_0$$

a) V: Eigenvektoren von $A^T A$

$$A^T A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 3 & -3 \\ 2\sqrt{2} & -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 26 & -10 \\ -10 & 26 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{bmatrix}}$$

EW: $\det(A^T A - \lambda I) \overset{!}{=} 0$

$$= \det\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 13-2\lambda & -5 \\ -5 & 13-2\lambda \end{bmatrix}\right) = \boxed{\frac{1}{4}} \det\begin{bmatrix} 13-2\lambda & -5 \\ -5 & 13-2\lambda \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{(13-2\lambda)^2}_{\overset{!}{=} \pm 5} - 25 \overset{!}{=} 0 \qquad \underline{\lambda_2 = 4} \qquad \underline{\lambda_1 = 9} \qquad \Rightarrow \underline{\underline{S}} = \underline{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \underline{\sigma_1 = 3}, \quad \underline{\sigma_2 = 2} \qquad \Rightarrow \underline{\underline{\hat{S}}} = \underline{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}$$

EV: $(A^T A - \lambda I)x \stackrel{!}{=} 0$

$\lambda_1 = 9$: $\begin{matrix} -5 & -5 \\ 0 & 0 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right.$ $\Rightarrow x_1 = -x_2 \Rightarrow E_9 = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$= \operatorname{span}\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\lambda_2 = 4$: $\begin{matrix} 5 & -5 \\ 0 & 0 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right.$ $\Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow E_4 = \operatorname{span}\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$u^{(1)} = \frac{A v^{(1)}}{\sigma^{(1)}} = \frac{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}{3} = \frac{1}{6\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u^{(2)} = \frac{A v^{(2)}}{\sigma^{(2)}} = \frac{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{2} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & * \\ -1 & 0 & * \\ 1 & 0 & * \end{bmatrix}$$

$$d = U^T b = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ * \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\, d_0 \\ \\ \}\, d_1 \end{matrix}$$

$\Rightarrow d_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$, $x = V \hat{S}^{-1} d_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \hat{S}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

b)

$$Ax = b$$
$$A^T A x = A^T b = d$$

$$d = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 3 & -3 \\ 2\sqrt{2} & -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{matrix}\,\right|\, \begin{matrix} 4 \\ 4 \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 65 & -25 \\ 0 & 144 \end{matrix}\,\right|\, \begin{matrix} 20 \\ 72 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x_2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \\ x_1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \end{matrix}$$

5. [6 Punkte] Wir betrachten den Vektorraum

$$\mathcal{L}^2[-1,1] := \left\{ f : [-1,1] \to \mathbb{R} \,\middle|\, \int_{-1}^{1} |f(t)|^2 \, dt < \infty \right\}$$

und die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{L}^2[-1,1] \times \mathcal{L}^2[-1,1] \to \mathbb{R}$ definiert für alle $f, g \in \mathcal{L}^2[-1,1]$ durch

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(t) g(t) dt.$$

a) Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt über $\mathbb{R}$ definiert.

b) Wir betrachten die Funktionen $f_k(t) = \sin(\pi k t)$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Vektoren $\{f_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{L}^2[-1,1]$ orthonormal bezüglich dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sind.

Hinweis: Für $a, b \in \mathbb{R}$ *gilt* $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$.

c) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\{f_k : k \in \mathbb{N}\}$ linear unabhängig sind.

d) Was ist die Dimension von $\mathcal{L}^2[-1,1]$?

a) (i) $\langle x(t), a y(t) + b z(t) \rangle = a \langle x(t), y(t) \rangle + b \langle x(t), z(t) \rangle$

(ii) $\langle x(t), y(t) \rangle = \langle y(t), x(t) \rangle$

(iii) $\langle x(t), x(t) \rangle \geq 0$ & $\langle x, x \rangle = 0 \iff x(t) = 0$

(i)

$$\langle x(t), a y(t) + b z(t) \rangle = \int_{-1}^{1} x(t) \big(a y(t) + b z(t) \big) dt$$

$$= \int_{-1}^{1} a x(t) y(t) + b x(t) z(t) \, dt$$

$$= a \int_{-1}^{1} x(t) y(t) \, dt + b \int_{-1}^{1} x(t) z(t) \, dt$$

$$= a \langle x(t), y(t) \rangle + b \langle x(t), z(t) \rangle \quad \square$$

(ii)

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{-1}^{1} x(t) y(t) \, dt = \int_{-1}^{1} y(t) x(t) \, dt = \langle y(t), x(t) \rangle \quad \square$$

(iii)

$$\langle x(t), x(t) \rangle = \int_{-1}^{1} \underbrace{x(t)^2}_{\geq 0} dt = \frac{1}{3} x(t)^3 \Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} x(t)^3 \Big|_{0}^{1} \geq 0$$

$$\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{1} x(t)^2 \, dt = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = 0$$

b) Induktion:

i) Verankerung $i = 1, 2$

$$\|f_1\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} \sin(\pi t)^2 \, dt} = \sqrt{\int_{-1}^{1} \tfrac{1}{2}[\cos(0) - \cos(2\pi t)] \, dt}$$

$$= \sqrt{\int_{-1}^{1} \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(2\pi t) \, dt} = \sqrt{\left[\tfrac{t}{2} - \underbrace{\tfrac{1}{4\pi}\sin(2\pi t)\Big]_{-1}^{1}}_{0}}$$

$$= \sqrt{1} = \underline{\underline{1}}$$

$$\|f_2\| = 1$$

$$\langle f_1, f_2 \rangle = 0 = \int_{-1}^{1} \sin(\pi t)\sin(2\pi t) \, dt$$

$$= \underbrace{\int_{-1}^{1} \tfrac{1}{2}\left[\cos(-\pi t) - \cos(3\pi t)\right] dt}_{0}$$

$$=$$

ii) $n \to n+1$

$\|f_n\| = 1$ $\quad$ $\langle f_n, f_{n+1} \rangle = 0$

$\|f_{n+1}\| = 1$ $\quad$ Nach demselben Schema wie oben

c) $\sum_{k=1}^{n} f_k x_k = 0 \iff x_k = 0 \quad \forall k$

$f_1 x_1 + f_2 x_2 + \ldots + f_n x_n = 0 \qquad | \langle f_k , \cdot \rangle$

$\langle f_k , f_1 x_1 + f_2 x_2 + \ldots + f_n x_n \rangle = \langle f_k , 0 \rangle = 0$

$x_k = 0 \qquad \forall k \qquad \square$

Man könnte alternativ wohl auch einfach argumentieren, dass orth. Vektoren lin. unabh. sein müssen

d) $\dim(\mathcal{L}^2) = \infty$

$\rightsquigarrow$ Haben unendlich viele lineare unabh. Fkt. gefunden.

Nämlich die $\sin(\pi k t)$ für $k \in \mathbb{N}$

unendliche Menge

6. [6 Punkte] Multiple Choice: Auf dem Extrablatt Richtig oder Falsch ankreuzen (Bei dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antwort *nicht* begründen).

a) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Dann gilt: $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

b) Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ so dass $Av = 0$. Dann kann das Gleichungssystem $Ax = b$ *nicht* für beliebige rechte Seite b lösbar sein.

c) Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit n Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ungleich null. Dann gilt $\det(A) \neq 0$.

d) Gegeben sei eine orthogonale Matrix A. Dann gilt $\det(A) = 1$.

e) Sei $\mathcal{P}^k$ wie in Aufgabe **3.** definiert. Die Abbildung $\mathcal{F} : \mathcal{P}^5 \to \mathcal{P}^9$ gegeben für alle $f \in \mathcal{P}^5$ und alle $x \in \mathbb{R}$ durch

$$\begin{cases} f \mapsto \mathcal{F}(f), \\ \mathcal{F}(f)(x) = \frac{d}{dx}\left(x f(x)^2\right), \end{cases}$$

ist linear.

f) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

und weiter sei U, S, V eine Singulärwertzerlegung von A, so dass $A = USV^T$. Dann gilt:

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$A \cdot B = [1$ $\qquad BA = [4$

Falsch?

$(A-B)^2 = A^2 - AB - BA - B^2 \qquad AB \neq BA$

b) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ Falsch

$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ Gegenbeispiel

c) Wahr

d) Falsch? $\underline{\underline{\pm 1}}$

e) Falsch

f) $A^T A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow S = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}}$